Διάλεξη 8η

01/11/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η/ω
άσκηση Α-27)ii)

Άσκηση

$$y'' = 2yy' \quad (y' = z)$$

⋮

Εν χόλω φτάνει στην εξίσωση $\underbrace{y' = y^2 + c}_{\text{εξίσωση χωρισ. μεταβλητών}}$

Ολοκληρώνω και προκύπτει: $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + c} = \int dx = x + c_0$

αν: $c < 0$
τότε: $\dfrac{dy}{(y-k)(y+k)}$

αν: $c = 0$
τότε: $-\dfrac{1}{y} + c_1$

αν: $c > 0$
τότε: $\dfrac{1}{k}\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{k}\right)$

Άσκηση Α-20, λύνεται ασκήσεις:

$$\underbrace{y' = (x^2 + y + 1)(x^2 + y - \tfrac{3}{2}) + 1 - 2x}_{} \quad (*)$$

Φαίνεται ότι είναι εξίσωση Riccati.
Για να την λύσω πρόσθετα να βρω τι είδους λύσεις θα βγάλει αυτή η εξίσωση. Παρατηρώ ότι εξίσωση αυτή έχει 2 φορές το "$x^2 + y$". Σκέφτομαι ότι ίσως $y = \lambda - x^2$ (το προτείνει και η εκφώνηση). Έτσι η εξίσωση $(*)$ γίνεται αντίστοιχως:

$$2\cancel{x} = (1-\lambda)(\lambda - \tfrac{3}{2}) + 1 - 2\cancel{x} \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda - \tfrac{3}{2}) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ και } \lambda_2 = \tfrac{3}{2}$$

Άρα ιδιολύση είναι η $y_1 = 1 - x^2$ και $y_2 = \frac{3}{2} - x^2$ //

Δυνατόν με y_1 και y_2 προκύπτει το ίδιο σύνολο λύσεων:

(*) το S_1 έχει προκύψει με την y_1 λύση

$$S_1 = \begin{cases} y_1 = 1 - x^2 \\ y_c = 1 - x^2 + \dfrac{1}{c e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{2}{3}}, \quad c = \text{σταθ} \end{cases}$$

και

(*) το S_2 έχει προκύψει με την y_2 λύση

$$S_2 = \begin{cases} y_2 = -\frac{1}{2} - x^2 \\ y_{c'} = -\frac{1}{2} - x^2 + \dfrac{1}{c' e^{\frac{3}{2}x} + \frac{2}{3}}, \quad c' = \text{σταθ.} \end{cases}$$

στην S_1: για $c=0$ βρίσκω ότι $y_2 = -\frac{1}{2} - x^2$ $(\in S_2)$
και στην S_2: για $c'=0$ βρίσκω ότι $y_1 = 1 - x^2$ $(\in S_1)$

Άσκηση 30, σελ 57 (Βιβλίο)

$$(x^2-1)y' - 4xy = 0$$

(*)
$$y(x) = \begin{cases} c_1 (x^2-1)^2, & x \leq 1 \\ c_2 (x^2-1)^2, & -1 < x < 1 \\ c_3 (x^2-1)^2, & 1 < x \end{cases}$$

εδώ απλώς σημειώνω να δω αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη εδώ:

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x)-y(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{c(x^2-1)^2}{x-1} = 0$$

$$y'(1) = 0.$$

και έτσι ιδιάζοντα σημεία του π.ο. η (*) έχει λύση.
Έτσι υπάρχουν άπειρες λύσεις διότι $\exists$ τιμ. $x^2-1=0$ ακόμη και σε πρόβλημα αρχικών τιμών.
Άρα για να πάρω 1 λύση στο πρόβλημα αρχικών τιμών πρέπει $y' \neq 0$.

Άσκηση)

$$y' = y^{1/3}$$

$$\frac{y'}{y^{1/3}} = 1 \Rightarrow y^{-1/3}\,dy = dx$$

$$\Rightarrow \frac{y^{2/3}}{2/3} = x + c \Rightarrow y^{2/3} = \frac{2}{3}(x+c)$$

$$\Rightarrow y = \left[\frac{2}{3}(x+c)\right]^{3/2} \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(x+c)^3}}$$

για $c=0$: $y_1(x) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{x^3}$, $x \geq 0$.

$y_0(x) = 0$

∃ άπειρες λύσεις για το πρ. αρχικών τιμών:

$$y_1 = \begin{cases} y_0 : & [0, c] \\ y_1 : & [c, +\infty) \end{cases}$$

Τόπος: $y' = f(t,y)$ με $f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω: τόπος

$y(t_0) = y_0$ και $(t_0, y_0) \in \Omega$

Τόπος είναι ένα ανοιχτό συνεκτικό σύνολο στο οποίο ∃ η λύση.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ!!!

Θεώρημα: Έστω $f: \Omega \to \mathbb{R}$, (Ω: τόπος) και (Ε): $y' = f(x,t)$

(Σ): $y(t_0) = y_0$. (Ε-Σ)

Ας είναι Ω ένας τόπος του $\mathbb{R}^2$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ συνεχής, $(t_0, y_0) \in \Omega$, $a, b > 0$ τ.ω: $R = \{|t-t_0| \leq a, |y-y_0| \leq b\} \subseteq \Omega$

Αν υπάρχει $K>0$ τ.ω: $\overbrace{|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq K|y_1 - y_2|}^{\text{συνθήκη Lip.}}$ $\forall (t,y_1), (t,y_2) \in R$ τότε το πρ. αρχ. τιμών (Ε)-(Σ) έχει ακριβώς μια λύση ορισμένη στο $I = [t_0 - r, t_0 + r]$ όπου $r = \min\{a, \frac{b}{m}\}$ και $m = \sup_R |f(t,y)| > 0$ [αν $m=0$ τότε $r=a$]

λσ

Επιπλέον η λύση είναι το όριο της ακολουθίας

$(\phi_\nu(t))_{\nu\geq 0},\ t\in I$ $\Big\|$ $\phi_0(t)=y_0$

$$\phi_{\nu+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\phi_\nu(s))\,ds\ ,\ t\in I$$

με $|y(t)-\phi_\nu(t)|\leq \frac{M}{K}\frac{(Kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}e^{Kr}\ ,\ \nu\in\mathbb{N},\ t\in I.$

$\frac{a^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\to 0$

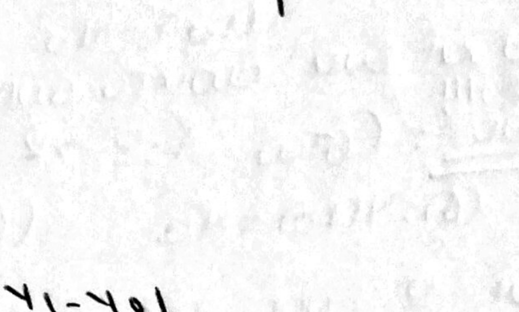
<u>Εφαρμογή:</u>

(i) $y'=(y^2+1)x^2+3x\ ,\ x^2+y^2<1$

με $y(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

Το ζητούμενο αναφέρεται σε ο.σ. Η άσκηση δεν το δίνει οπότε θα το επιλέξω εγώ με βάση το εσωτερικό σύνολο

Έστω ότι βρίσκομαι στο ο.σ. και έχουμε το $\mathbb{R}$. Τώρα δεν ξέρω αν ικανοποιείται η συνθήκη Lipschitz



(ii) $y'=\underbrace{ty^2}_{f(t,y)}\ ,\ \begin{matrix}|t|\leq 7\\ |y|\leq 2018\end{matrix}$

Lip: $\overbrace{|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq k|y_1-y_2|}$

$$|ty_1^2-ty_2^2|=|t||y_1-y_2||y_1+y_2|$$

$$\leq 7|y_1-y_2|\cdot(|y_1|+|y_2|)$$

Σημείωση: Αν η $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ υπάρχει και είναι συνεχής στο R, τότε η f ικανοποιεί την συνθ. Lip.
με $K = \max_R \left| \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right|$

Άσκηση

Δίνεται: $g(x,y) = \sin y + y\cos x$, $|x| \le 1$, $|y| \le 2$.
Αρχικά ελέγχω αν ικανοποιείται η συνθήκη Lip.
$\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| = |\cos y + \cos x| \le 1+1 = 2$.
άρα ικανοπ. η συνθήκη με σταθ. $K=2$.

Άσκηση

$y' = x^2 + y^2$, $y(0)=0$
Αρχικά πρέπει να επιλέξω τα $a,b>0$.
Τα επιλέγω αυθαίρετα, καθώς από τ.Ο. δεν έχω καθόλου περιορισμό. Άρα θεωρώ $a,b>0$.
και θεωρώ $R = \{|t-0| \le a, |y-0| \le b\}$
$= \{|t| \le a, |y| \le b\}$

Για την συνθήκη: $K = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = |2y| \le 2b$

$r = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \min\{a, \frac{b}{a^2+b^2}\} > 0$: όπου

$M = \max_R (t^2, y^2) = a^2 + b^2$. | $[t_0 - r, t_0 + r] = I$

~~[illegible]~~

Άρα ∃ λύση μοναδική για τυχούς $a,b>0$